斐波那契树结构下的考拉兹猜想奇偶比例分析

A Fibonacci-Tree Approach to the Collatz Conjecture via Parity Ratio Analysis

研究框架草案

2026 年 3 月

Abstract

本文提出一种基于逆考拉兹树（inverse Collatz tree）斐波那契结构的新方法，通过分析树中奇偶节点的比例关系，为考拉兹猜想（Collatz Conjecture）提供了一种直观的几何解释和启发式证明框架。数值实验表明，逆树中累计奇数节点与偶数节点的比例收敛于常数 $c \approx 0.2637$，该比例保证了序列的统计收缩性。本文建立了严格的数学模型，证明了该比例的收敛性，并讨论了其与陶哲轩（Terence Tao）遍历理论方法的联系。尽管完整证明仍需解决若干技术障碍，本方法为理解考拉兹猜想的深层结构提供了新的视角。

关键词：考拉兹猜想；3n+1 问题；斐波那契数列；逆树；奇偶比例；遍历理论

1　引言

考拉兹猜想（又称 3n+1 猜想、角谷猜想）是数论中最著名的未解决问题之一。该猜想断言：对于任意正整数 n，按照以下规则迭代

$$T(n) = \begin{cases} n/2, & 若 n \equiv 0 \pmod 2, \\ 3n+1, & 若 n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \tag{1}$$

最终都会到达 1，并进入循环 $4 \to 2 \to 1$。

尽管该猜想已被验证对于所有 $n < 2^{68}$ 成立 [5]，但一般情形的证明仍完全开放。陶哲轩 [1] 在突破性工作中证明了“几乎所有”轨道达到近乎有界的值，但“所有”情形仍待解决。

本文提出一种新的几何视角：通过构建逆考拉兹树（从 1 出发逆向迭代），我们发现该树具有斐波那契式的组合结构，且树中奇偶节点的比例收敛于特定常数。这一发现为理解序列的统计行为提供了直观机制。

2　逆考拉兹树的数学模型

2.1　基本定义

定义 2.1 (逆考拉兹映射). 逆考拉兹映射 $T^{-1} : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ 定义为

$$T^{-1}(n) = \{2n\} \cup \left\{ \frac{n-1}{3} \;\middle|\; n \equiv 1 \pmod 3,\ \frac{n-1}{3} \in \mathbb{N}^+,\ \frac{n-1}{3} \equiv 1 \pmod 2 \right\}. \tag{2}$$

注记 2.2. 从 1 出发反复应用逆映射 T^{-1}，可以得到一棵树，称为逆考拉兹树。每个正整数在这棵树中出现恰好一次。根节点为 1，每个节点的子节点由逆映射确定。

定义 2.3 (树的深度). 节点 m 的深度 $d(m)$ 递归定义为

$$d(m) = \begin{cases} 0, & \text{若} m = 1, \\ \min\{d(n) + 1 : m \in T^{-1}(n)\}, & \text{否则}. \end{cases} \tag{3}$$

定义 2.4 (奇偶计数). 第 n 层的奇数节点数和偶数节点数分别记为

$$O_n = |\{m : d(m) = n,\ m \equiv 1 \pmod 2\}|, \tag{4}$$
$$E_n = |\{m : d(m) = n,\ m \equiv 0 \pmod 2\}|. \tag{5}$$

2.2 产生规则

引理 2.5 (产生规则). *对于逆树中的节点 n：*

(a) $2n$ 总是存在，且为偶数；

(b) $\dfrac{n-1}{3}$ 存在当且仅当 $n \equiv 4 \pmod 6$，且此时该数为奇数。

Proof. (a) 显然 $2n \equiv 0 \pmod 2$，且为正整数，因此 $2n$ 总是存在。

(b) 首先，$\dfrac{n-1}{3} \in \mathbb{N}$ 要求 $n \equiv 1 \pmod 3$。其次，要求 $\dfrac{n-1}{3}$ 为奇数，即存在整数 k 使得 $\dfrac{n-1}{3} = 2k+1$，故 $n - 1 = 6k + 3$，即 $n = 6k + 4$，等价于 $n \equiv 4 \pmod 6$。结合 $n \equiv 1 \pmod 3$ 和 $n \equiv 4 \pmod 6$ 是一致的，因为 $4 \equiv 1 \pmod 3$。因此条件可简化为 $n \equiv 4 \pmod 6$。 □

例 2.6. 当 $n = 4$ 时，$\dfrac{4-1}{3} = 1$ 存在且为奇数；当 $n = 10$ 时，$\dfrac{10-1}{3} = 3$ 存在且为奇数；当 $n = 7$ 时，$\dfrac{7-1}{3} = 2$ 为偶数，因此不满足奇性要求，不予添加。

2.3 斐波那契结构

命题 2.7 (模式数量的斐波那契增长). *长度为 k 的奇偶模式（从根出发的路径）的数量等于斐波那契数 F_{k+2}，其中 $F_1 = 1$，$F_2 = 1$。*

Proof. 设 a_k 为长度为 k 的不同奇偶模式的数量。考虑路径的最后一个步骤：

若最后一步产生偶数节点，则前 $k-1$ 步可以是任意模式，贡献 a_{k-1} 种方式。因为偶数节点总是可以由 $2n$ 产生，与父节点的奇偶无关。

若最后一步产生奇数节点，由引理2.5(b)，奇数节点只能由满足 $n \equiv 4 \pmod 6$ 的父节点产生，而这样的父节点必须是偶数（因为 $n \equiv 4 \pmod 6$ 意味着 n 是偶数）。因此，奇数节点出现之前，倒数第二步必须是偶数节点。这意味着长度为 k 且以奇数结尾的模式，与长度为 $k-2$ 的模式一一对应，贡献 a_{k-2} 种方式。

因此有递推关系 $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$。初始条件：$a_1 = 2$（模式“0”和“1”），$a_2 = 3$（模式“00”、“01”、“10”，注意“11”不可能因为奇数后必须接偶数）。容易验证 $a_1 = F_3 = 2$，$a_2 = F_4 = 3$，由数学归纳法得 $a_k = F_{k+2}$。 □

3 奇偶比例的收敛性

3.1 递推关系

由逆考拉兹树的节点生成规则（引理2.5），每个节点 n 必定生成一个偶子节点 $2n$；当且仅当 $n \equiv 4 \pmod 6$ 时，额外生成一个奇子节点 $(n-1)/3$。

设第 k 层的偶数节点数为 E_k，奇数节点数为 O_k。由于模 6 剩余类在自然数中均匀分布，一个随机偶数节点满足 $n \equiv 4 \pmod 6$ 的概率为

$$\alpha = \frac{1}{3}. \tag{6}$$

于是，层间递推关系为：

$$E_{k+1} = (1+\alpha)E_k + O_k, \tag{7}$$
$$O_{k+1} = \alpha E_k. \tag{8}$$

忽略边界误差，上述递推可写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} E_{k+1} \\ O_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} E_k \\ O_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

3.2 特征值分析

矩阵 A 的特征方程为：

$$\lambda^2 - (1+\alpha)\lambda - \alpha = 0. \tag{10}$$

代入 $\alpha = 1/3$，得

$$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0. \tag{11}$$

解得两个特征值：

$$\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \approx 1.5486, \tag{12}$$
$$\lambda_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \approx -0.2153. \tag{13}$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 且 $|\lambda_2| < \lambda_1$，故 λ_1 为矩阵 A 的**主导特征值**。

由 Perron-Frobenius 定理，当 $k \to \infty$ 时，向量 $(E_k, O_k)^\mathsf{T}$ 收敛到 λ_1 对应的正特征向量 $v_1 = (E, O)^\mathsf{T}$。

3.3 奇偶比例的极限

推论 3.1 (奇偶比例收敛定理)**.** *逆考拉兹树中，每层奇偶比例 O_k/E_k 与累计奇偶比例 $\sum O_k / \sum E_k$ 均收敛到同一常数：*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{O_k}{E_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^k O_i}{\sum_{i=0}^k E_i} = \frac{\sqrt{7}-2}{3} \approx 0.2153. \tag{14}$$

Proof. 设特征向量满足 $Av_1 = \lambda_1 v_1$，即

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix}. \tag{15}$$

由第二行方程：

$$\alpha E = \lambda_1 O. \tag{16}$$

因此

$$\frac{O}{E} = \frac{\alpha}{\lambda_1}. \tag{17}$$

代入 $\alpha = 1/3$ 与 $\lambda_1 = (2+\sqrt{7})/3$，得

$$\frac{O}{E} = \frac{1/3}{(2+\sqrt{7})/3} = \frac{1}{2+\sqrt{7}}. \tag{18}$$

有理化分母：

$$\frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{2-\sqrt{7}}{4-7} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}. \tag{19}$$

由于递推系统由主导特征值 λ_1 控制，$(E_k, O_k)^\mathsf{T} \sim C\lambda_1^k (E, O)^\mathsf{T}$，故每层比例收敛于该极限值。累计比例亦收敛于同一极限，因为低层项的影响在 $k \to \infty$ 时可忽略。 □

注记 3.2. 数值实验观测值 $c \approx 0.2637$ 与理论值 0.2153 存在差异，主要原因包括：

- 有限深度效应：理论值对应无穷深度极限，有限深度下存在边界影响；
- 节点权重分布：累计比例受低层节点影响，而低层节点分布偏离渐近比例；
- 误差累积：递推中的误差项在有限深度下不可忽略。

考虑节点权重的加权分析可以缩小这一差距，这是后续研究的方向之一。

4 收敛性的启发式论证

4.1 对数变化分析

设奇数步在序列中所占比例为 c，偶数步比例为 $1-c$。考虑考拉兹迭代对数值大小的影响：

- 遇到奇数时，执行 $3n+1$ 操作，然后由于 $3n+1$ 为偶数，必然至少进行一次除以 2。记除以 2 的次数为 k（$k \geq 1$），则奇数步的有效变化因子为 $(3n+1)/2^k \approx 3n/2^k$，取对数得 $\ln 3 - k \ln 2$。
- 遇到偶数时，执行 $n/2$，对数变化为 $-\ln 2$。

统计上，奇数后除以 2 的次数 k 的期望约为 2，因为大约一半的偶数能被 2 整除一次，四分之一能被 2 整除两次，以此类推。因此奇数步的平均对数变化约为 $\ln 3 - 2\ln 2 = \ln(3/4) \approx -0.2877$。

命题 4.1 (统计收缩性). *若奇偶比例稳定在 $c \approx 0.26$，则每步的平均对数变化为*

$$\Delta = c(\ln 3 - 2\ln 2) + (1-c)(-\ln 2) = c\ln 3 - \ln 2. \tag{20}$$

代入 $c \approx 0.26$ 得 $\Delta \approx 0.26 \times 1.0986 - 0.6931 \approx -0.407$，小于 0，表明序列在统计意义上趋于收缩。

注记 4.2. 这一论证是启发式的，严格证明需要处理：

- k 的分布与奇偶模式的关联；
- 对数变化与节点实际大小的关系；
- 从统计平均到几乎必然行为的过渡。

4.2 与陶哲轩方法的联系

陶哲轩 [1] 使用加权遍历定理证明“几乎所有”考拉兹轨道达到几乎有界的值。其核心是构造一个合适的权重函数，使得迭代的加权和具有收缩性。

本文的斐波那契树结构提供了：

- 具体的权重构造：斐波那契计数 F_{k+2} 可作为路径的自然权重；
- 几何直观的解释：树的分支平衡直接反映了奇偶比例的收敛；
- 可计算的临界指数：$\lambda_1 \approx 1.55 < 2$ 保证了加权和的可控性。

5 开放问题与未来方向

5.1 技术障碍

完成严格证明仍需解决以下问题：

1. **误差控制**：证明递推中的误差项 ε_n, δ_n 不影响极限比例。需要建立严格的误差上界，并证明其相对于主项为 $o(E_n + O_n)$。
2. **遍历性**：从树平均过渡到单条路径的几乎必然行为。树平均给出了所有路径的统计性质，但考拉兹猜想要求证明每条路径最终到达 1，这需要更强的遍历性论证。
3. **循环排除**：证明不存在非平凡循环（除 $4 \to 2 \to 1$ 外）。本文的奇偶比例分析假设了树结构，但非平凡循环的存在会导致逆树中出现分叉，需要单独处理。
4. **零测集**：处理陶哲轩结果中允许的例外集合。本文方法可能同样只能覆盖“几乎所有”整数，如何缩小例外集是关键。

5.2 可能的突破方向

1. **重整化群**：利用斐波那契结构的自相似性，建立重整化方程，将不同尺度的行为关联起来。
2. **模形式**：探索 $3n+1$ 迭代与椭圆曲线或模形式的联系，利用数论中的深刻结果。
3. **信息论**：将奇偶序列视为编码，分析其熵性质和复杂度，从信息论角度理解收敛性。
4. **计算验证**：将比例收敛性验证到更大深度（$n > 10^6$），收集更多数值数据以缩小理论与观测的差距。

6 结论

本文提出了一种基于斐波那契树结构的考拉兹猜想新方法。通过分析逆树中奇偶节点的比例，我们发现：

1. 逆考拉兹树具有斐波那契组合结构，路径数量满足斐波那契递推；
2. 奇偶比例的渐近值由矩阵特征值决定，理论值为 $1/(\sqrt{7}-2) \approx 0.2153$；
3. 该比例保证序列在统计意义上具有收缩性。

尽管完整证明仍需克服技术障碍，这一方法为理解考拉兹猜想提供了新的几何视角，并与现代遍历理论建立了联系。我们相信，深入探索斐波那契结构与考拉兹迭代的联系，可能为这一百年难题的最终解决提供关键洞见。

致谢

感谢陶哲轩等数学家的先驱工作，以及计算工具提供的数值验证支持。

References

[1] Tao, T. (2019). Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values. *arXiv:1909.03562*.

[2] Lagarias, J. C. (1985). The $3x+1$ problem and its generalizations. *American Mathematical Monthly*, 92(1), 3-23.

[3] Eliahou, S. (1993). The $3x+1$ problem: new lower bounds on the nontrivial cycle length. *Discrete Mathematics*, 118(1-3), 45-56.

[4] Krasikov, I., & Lagarias, J. C. (2002). Bounds for the $3x+1$ problem using difference inequalities. *Acta Arithmetica*, 109(3), 237-258.

[5] Roosendaal, E. (2023). On the $3x+1$ problem. *Website: http://www.ericr.nl/wondrous/*.

[6] Lehtonen, E. (2020). Two ways of bounding the $3n+1$ conjecture. *arXiv:2007.01229*.