

目录

第一章 实数理论	3
1.1 完备性公理	3
1.2 引用测试	4
第二章 实数理论	5
2.1 完备性公理	5
2.2 引用测试	6
第三章 实数理论	7
3.1 完备性公理	7
3.2 引用测试	8
第四章 实数理论	9
4.1 完备性公理	9
4.2 引用测试	10
第五章 实数理论	11
5.1 完备性公理	11
5.2 引用测试	12

第一章 实数理论

1.1 完备性公理

公理 1.1.1 (确界原理)

非空有上界的实数集必有上确界.

定理 1.1.1 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 1.1.1.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 1.1.1.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

引理 1.1.1

收敛数列一定是柯西数列.

命题 1.1.1

有界数列必有收敛子列.

定理 1.1.2 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 1.1.2.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 1.1.2.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

定义 1.1.1 (上界)

设 $S \subseteq \mathbb{R}$, 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 M 为 S 的一个上界.

例 1.1.1

$\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则存在互素整数 p, q 使得 $\sqrt{2} = p/q$, 于是 $p^2 = 2q^2$, 矛盾. 

注释 1.1.1

确界原理是实数完备性的一个基本特征.

解: 内容...

✓

假设 1.1.1 (连续统假设)

不存在基数严格介于自然数集与实数集之间的集合.

解: 内容...

✓

1.2 引用测试

引用: 公理 1.1.1、定理 1.1.1、推论 1.1.1.2、定义 1.1.1、引理 1.1.1、命题 1.1.1、例 1.1.1、注释 1.1.1.

第二章 实数理论

2.1 完备性公理

公理 2.1.1 (确界原理)

非空有上界的实数集必有上确界.

定理 2.1.1 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 2.1.1.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 2.1.1.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

引理 2.1.1

收敛数列一定是柯西数列.

命题 2.1.1

有界数列必有收敛子列.

定理 2.1.2 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 2.1.2.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 2.1.2.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

定义 2.1.1 (上界)

设 $S \subseteq \mathbb{R}$, 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 M 为 S 的一个上界.

例 2.1.1

$\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则存在互素整数 p, q 使得 $\sqrt{2} = p/q$, 于是 $p^2 = 2q^2$, 矛盾. 

解: 内容... 

注释 2.1.1

确界原理是实数完备性的一个基本特征.

假设 2.1.1 (连续统假设)

不存在基数严格介于自然数集与实数集之间的集合.

2.2 引用测试

引用: 公理 1.1.1、定理 1.1.1、推论 1.1.1.2、定义 1.1.1、引理 1.1.1、命题 1.1.1、例 1.1.1、注释 1.1.1.

第三章 实数理论

3.1 完备性公理

公理 3.1.1 (确界原理)

非空有上界的实数集必有上确界.

定理 3.1.1 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 3.1.1.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 3.1.1.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

引理 3.1.1

收敛数列一定是柯西数列.

命题 3.1.1

有界数列必有收敛子列.

定理 3.1.2 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 3.1.2.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 3.1.2.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

定义 3.1.1 (上界)

设 $S \subseteq \mathbb{R}$, 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 M 为 S 的一个上界.

例 3.1.1

$\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则存在互素整数 p, q 使得 $\sqrt{2} = p/q$, 于是 $p^2 = 2q^2$, 矛盾. 

解: 内容... 

注释 3.1.1

确界原理是实数完备性的一个基本特征.

假设 3.1.1 (连续统假设)

不存在基数严格介于自然数集与实数集之间的集合.

3.2 引用测试

引用: 公理 1.1.1、定理 1.1.1、推论 1.1.1.2、定义 1.1.1、引理 1.1.1、命题 1.1.1、例 1.1.1、注释 1.1.1.

第四章 实数理论

4.1 完备性公理

公理 4.1.1 (确界原理)

非空有上界的实数集必有上确界.

定理 4.1.1 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 4.1.1.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 4.1.1.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

引理 4.1.1

收敛数列一定是柯西数列.

命题 4.1.1

有界数列必有收敛子列.

定理 4.1.2 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 4.1.2.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 4.1.2.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

定义 4.1.1 (上界)

设 $S \subseteq \mathbb{R}$, 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 M 为 S 的一个上界.

例 4.1.1

$\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则存在互素整数 p, q 使得 $\sqrt{2} = p/q$, 于是 $p^2 = 2q^2$, 矛盾. 

解: 内容... 

注释 4.1.1

确界原理是实数完备性的一个基本特征.

假设 4.1.1 (连续统假设)

不存在基数严格介于自然数集与实数集之间的集合.

4.2 引用测试

引用: 公理 1.1.1、定理 1.1.1、推论 1.1.1.2、定义 1.1.1、引理 1.1.1、命题 1.1.1、例 1.1.1、注释 1.1.1.

第五章 实数理论

5.1 完备性公理

公理 5.1.1 (确界原理)

非空有上界的实数集必有上确界.

定理 5.1.1 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 5.1.1.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 5.1.1.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

引理 5.1.1

收敛数列一定是柯西数列.

命题 5.1.1

有界数列必有收敛子列.

定理 5.1.2 (单调有界定理)

单调有界数列必收敛.

推论 5.1.2.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

推论 5.1.2.2 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ 且 $\lim(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一实数属于所有区间.

定义 5.1.1 (上界)

设 $S \subseteq \mathbb{R}$, 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得对所有 $x \in S$, 都有 $x \leq M$, 则称 M 为 S 的一个上界.

例 5.1.1

$\sqrt{2}$ 是无理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则存在互素整数 p, q 使得 $\sqrt{2} = p/q$, 于是 $p^2 = 2q^2$, 矛盾. 

解: 内容...

✓

注释 5.1.1

确界原理是实数完备性的一个基本特征.

假设 5.1.1 (连续统假设)

不存在基数严格介于自然数集与实数集之间的集合.

5.2 引用测试

引用: 公理 1.1.1、定理 1.1.1、推论 1.1.1.2、定义 1.1.1、引理 1.1.1、命题 1.1.1、例 1.1.1、注释 1.1.1.