泛函分析笔记整理

Organize Notes for Functional Analysis

Ning Yi

Beijing

April 29, 2025

Contents

第一章 Introduction **5**

1.1 列表样式类 5

1.1.1 无序列表 5

1.1.2 有序列表 5

1.1.3 多样式列表 5

1.2 自定义主题框类 6

1.3 图片样式 7

第二章 度量空间和赋范线性空间 **9**

2.1 度量空间的进一步例子 9

2.1.1 度量空间基础杂谈 9

2.1.2 10

2.2 度量空间中的极限，稠密集，可分空间 10

2.3 连续映射 10

2.4 柯西点列和完备度量空间 10

2.5 度量空间的完备化 10

2.6 压缩映射原理及其应用 10

2.7 线性空间 10

2.8 赋范线性空间和巴拿赫空间 10

第三章 有界线性算子和连续线性泛函 **11**

3.1 有界线性算子和连续线性泛函 11

3.2 有界线性算子空间和共轭空间 11

3.3 有限秩算子 11

第四章 内积空间和希尔伯特空间 **13**

4.1 内积空间基本概念 13

4.2 投影定理 13

4.3 希尔伯特空间中的规范正交系 13

4.4 希尔伯特空间上的连续线性泛函 13

4.5 自伴算子、酉算子和正规算子 13

第五章 巴拿赫空间中的基本定理 **15**
5.1 泛函延拓定理 15
5.2 $C[a,b]$ 的共轭空间 15
5.3 共轭算子 15
5.4 纲定理和一致有界性定理 15
5.5 强收敛、弱收敛和一致收敛 15
5.6 逆算子定理 15
5.7 闭图像定理 15

第六章 线性算子的谱 **17**
6.1 谱的概念 17
6.2 有界线性算子谱的基本性质 17
6.3 紧集和全连续算子 17
6.4 全连续算子的谱论 17
6.5 费雷德霍姆算子与指标 17

第七章 Appendix **19**
7.1 拓展链接 19
7.2 经典反例 20
7.3 其他 21

摘要

泛函分析是现代数学中极具挑战性但也极具魅力的课程之一，它将函数和空间的概念提升到更高的抽象层次。本书旨在为学习泛函分析的学生提供一份系统、清晰且易于理解的学习笔记，帮助读者更好地掌握课程的核心内容。本书共分为五章，每章都围绕泛函分析的重要概念和理论展开，同时突出重点、难点和考点，方便读者复习和巩固知识。

第一章：度量空间和赋范线性空间，度量空间是泛函分析的基础，它引入了距离的概念，帮助我们理解空间中点与点之间的“远近”关系。本章详细介绍了度量空间的定义、性质以及常见的度量空间实例。赋范线性空间进一步引入了范数的概念，它不仅衡量点的“长度”，还赋予空间线性结构。本章的重点是理解度量和范数的定义及其几何意义，难点在于掌握不同度量空间和赋范空间的性质差异，例如完备性、紧性等。这些内容是后续学习的基础，也是考试中的重要考点。

第二章：有界线性算子和连续线性泛函，线性算子和线性泛函是泛函分析中的核心对象，它们描述了空间之间的映射关系。本章着重讲解有界线性算子的定义、性质以及算子范数的计算，帮助读者理解算子的“大小”和“作用范围”。连续线性泛函则进一步探讨了泛函的连续性与线性性之间的关系。本章的难点在于理解算子和泛函的有界性与连续性之间的等价关系，以及如何通过算子范数来判断算子的性质。这些内容在理论推导和实际应用中都极为重要，也是考试中的高频考点。

第三章：内积空间和希尔伯特空间，内积空间引入了内积的概念，使得空间具备了“角度”和“正交性”等几何性质。希尔伯特空间是完备的内积空间，它是泛函分析中最为重要的空间之一，广泛应用于量子力学、信号处理等领域。本章详细介绍了内积空间的定义、性质以及正交分解、正交基等重要概念。希尔伯特空间的完备性使得许多复杂的数学问题可以在其上得到优雅的解决。本章的重点是掌握内积空间的性质和正交分解方法，难点在于理解希尔伯特空间的完备性及其在实际问题中的应用。这些内容不仅在理论上有重要意义，也是考试中的重点难点。

第四章：巴拿赫空间中的基本定理，巴拿赫空间是完备的赋范线性空间，它为泛函分析提供了一个坚实的理论框架。本章集中介绍了巴拿赫空间中的几个基本定理，包括哈恩-巴拿赫定理、闭图像定理、开映射定理和一致有界性原理等。这些定理是泛函分析的基石，它们揭示了巴拿赫空间中算子和泛函的重要性质。本章的重点是理解这些定理的条件、结论及其证明思路，难点在于如何灵活运用这些定理解决实际问题。这些定理及其应用是考试中的重点内容，也是理解泛函分

析理论的关键。

第五章：线性算子的谱，线性算子的谱理论是泛函分析中最为深刻和富有成果的部分之一。它研究线性算子在复数域上的特征值和特征向量的推广，揭示了算子的内在结构。本章详细介绍了线性算子的谱的定义、分类以及谱半径的计算方法。谱理论不仅在数学上有重要意义，还在物理学、工程学等领域有广泛应用。本章的重点是理解谱的分类及其几何意义，难点在于掌握谱半径的计算和谱理论在具体问题中的应用。这些内容在考试中也常常作为难点出现，需要读者重点复习。

本书在编写过程中注重理论与实际相结合，通过大量实例和习题帮助读者加深理解。每章都配有详细的总结和考点提示，方便读者复习和巩固知识。无论你是数学专业的学生，还是对泛函分析感兴趣的自学者，本书都将是你学习泛函分析的得力助手。

2025.02.08

宁毅

1 Introduction

1.1 列表样式类 5
1.1.1 无序列表 5
1.1.2 有序列表 5
1.1.3 多样式列表 5
1.2 自定义主题框类 . . . 6
1.3 图片样式 7

如下为本书中所设定的不同样式的标注，特此汇总，以便区分：

1.1. 列表样式类

1.1.1. 无序列表

`\begin{itemize}`

- List entries start with the `\item` command.
- Individual entries are indicated with a black dot, a so-called bullet.
- The text in the entries may be of any length.

1.1.2. 有序列表

`\begin{enumerate}`

1. First level item
2. First level item
   (a). Second level item
   (b). Second level item
      I. Third level item
      II. Third level item
         A. Fourth level item
         B. Fourth level item

1)
2)
3)

`\begin{enumerate}[label=\arabic*)]`

1.1.3. 多样式列表

This is my first point,`\item[]`

- Another point I want to make,`\item`

! A point to exclaim something!, `\item[!]`

■ Make the point fair and square.,`\item[$\blacksquare$]`

NO.1: description1

NO.2: description2

```
\begin{description}\item[1:]
```

1.2. 自定义主题框类

importantbox-重要框

```
\begin{importantbox}
```

Proposition 1.1 命题名称

proposition environment.

```
\prp{命题名称}{pro_ref}{proposition environment.}
```

Prompt 1.1

prompt-提示词

```
\begin{prompt}
```

Lemma 1.1 引理名称

Lemma environment.

```
\lem{引理名称}{lem_ref}{Lemma environment.}
```

Theorem 1.1 定理样式 2 名称

Theorem environment.

```
\thm{定理样式2名称}{thm_ref}{Theorem environment.}
```

Corollary 1.1 推论名称

Corollary environment.

```
\cor{推论名称}{cor_ref}{Corollary environment.}
```

Remark 1.1

remark-标注名称

```
\begin{remark}
```

Keynote 1.1

Keynote-关键笔记

```
\begin{Keynote}
```

Extension 1.1 延伸部分名称

Extension environment.

```
\ext{延伸部分名称}{ext_ref}{Extension environment.}
```

Example: Example:

```
\noindent\textbf{Example:}
```

Example 1.1 (举例名称)

Example environment.

```
\ex{举例名称}{ex_ref}{Example environment.}
```

```matlab
% MATLAB代码示例
clc;
clear;
...
```

Listing 1.1: MATLAB 代码示例

```
\vspace{.3cm}
\begin{lstlisting}[style=matlab, caption={MATLAB代码示例}]
```

1.3. 图片样式

Figure 1.1: 图例注释

2

度量空间和赋范线性空间

2.1 度量空间的进一步例子 9
2.1.1 度量空间基础杂谈 . . . 9
2.1.2 10
2.2 度量空间中的极限，稠密集，可分空间 10
2.3 连续映射 10
2.4 柯西点列和完备度量空间 10
2.5 度量空间的完备化 10
2.6 压缩映射原理及其应用 10
2.7 线性空间 10
2.8 赋范线性空间和巴拿赫空间 10

2.1. 度量空间的进一步例子

2.1.1. 度量空间基础杂谈

Proposition 2.1 度量空间 (距离空间)

设 X 是一个集合，若对于 X 中任意两个元素 x, y，都有唯一确定的实数 $d(x, y)$ 与之对应，且这一对应关系满足下列条件：

1. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0$ 的充要条件为 $x = y$；
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$，对任意 z 都成立.

则称 $d(x, y)$ 是 x, y 之间的距离，称 (X, d) 为度量空间或距离空间. X 中的元素称为点，条件 2. 称为三点不等式.

$(\mathbb{R}^n, d)$ 称为 n 维欧式空间，其中 d 为欧几里得距离.

Extension 2.1 聚点、内点、界点

1. 聚点：$E \in \mathbb{R}^n$，P_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中一定点，如果 P_0 的任一邻域内都含有无穷多个属于 E 的点，称 P_0 为 E 的一个聚点.
2. 内点：存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使 $U(P_0) \subset E$，则称 P_0 为 E 的内点.
3. 界点：P_0 既非 E 的内点又非 E 的外点.

Prompt 2.1

下面三个陈述等价：

1. P_0 为 E 的一个聚点；
2. P_0 的任一邻域内，至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点；
3. 存在 E 中互异的点所成列 $\{P_n\}$，使 $P_n \to P_0 (n \to \infty)$.

Extension 2.2 开核、导集、闭包

1. 开核 $\mathring{E}$：E 的全体内点组成的集合.
2. 导集 E'：E 的全体聚点组成的集合.
3. 闭包 $\overline{E}$：$E \cup E'$ 称为 E 的闭包，$\overline{E} = E \cup \partial E = \mathring{E} \cup \partial E = E' \cup \{E\text{的孤立点}\}$

Extension 2.3 开集、闭集、完备集

1. 开集：$E \in \mathbb{R}^n$，E 中的每一点都是 E 的内点，即 $E \subset \mathring{E}$，或$E = \mathring{E}$.
2. 闭集：$E \in \mathbb{R}^n$，E 中的每一个聚点都属于 E ，即 $E' \subset \mathring{E}$，或$\partial E \subset E$
3. 自密集：$E \in \mathbb{R}^n$，$E \subset E'$.
4. 完备集：$E \in \mathbb{R}^n$，$E = E'$.

2.1.2.

2.2. 度量空间中的极限，稠密集，可分空间

2.3. 连续映射

2.4. 柯西点列和完备度量空间

2.5. 度量空间的完备化

2.6. 压缩映射原理及其应用

2.7. 线性空间

2.8. 赋范线性空间和巴拿赫空间

3

有界线性算子和连续线性泛函

3.1. 有界线性算子和连续线性泛函

3.2. 有界线性算子空间和共轭空间

3.3. 有限秩算子

3.1 有界线性算子和连续线性泛函 11

3.2 有界线性算子空间和共轭空间 11

3.3 有限秩算子 11

4

内积空间和希尔伯特空间

4.1. 内积空间基本概念

4.2. 投影定理

4.3. 希尔伯特空间中的规范正交系

4.4. 希尔伯特空间上的连续线性泛函

4.5. 自伴算子、酉算子和正规算子

4.1 内积空间基本概念 . 13

4.2 投影定理 13

4.3 希尔伯特空间中的规范正交系 13

4.4 希尔伯特空间上的连续线性泛函 13

4.5 自伴算子、酉算子和正规算子 13

5

巴拿赫空间中的基本定理

5.1. 泛函延拓定理

5.2. $C[a,b]$ 的共轭空间

5.3. 共轭算子

5.4. 纲定理和一致有界性定理

5.5. 强收敛、弱收敛和一致收敛

5.6. 逆算子定理

5.7. 闭图像定理

5.1 泛函延拓定理 15

5.2 $C[a,b]$ 的共轭空间 15

5.3 共轭算子 15

5.4 纲定理和一致有界性定理 15

5.5 强收敛、弱收敛和一致收敛 15

5.6 逆算子定理 15

5.7 闭图像定理 15

6

线性算子的谱

6.1. 谱的概念

6.2. 有界线性算子谱的基本性质

6.3. 紧集和全连续算子

6.4. 全连续算子的谱论

6.5. 费雷德霍姆算子与指标

6.1 谱的概念 17

6.2 有界线性算子谱的基本性质 17

6.3 紧集和全连续算子 . 17

6.4 全连续算子的谱论 . 17

6.5 费雷德霍姆算子与指标 17

7 Appendix

7.1 拓展链接 19
7.2 经典反例 20
7.3 其他 21

7.1. 拓展链接

- 泛函分析概论：
  (https://mp.weixin.qq.com/s/ebhG6fFNry0kqKulTzFxeg)
-

7.2. 经典反例

7.3. 其他

函数/序列空间	c	c_0	c_{00}	ℓ^p $(1\le p<\infty)$	ℓ^∞	$C[a,b]$	L^p $(1\le p<\infty)$	L^∞
元素	$\{(x_n)\mid \lim_{n\to\infty} x_n<\infty\}$	$\{(x_n)\mid \lim_{n\to\infty} x_n=0\}$	$\{(x_n)\mid \exists N, \forall n>N, x_n=0\}$	$\{(x_n)\mid \sum_n \lvert x_n\rvert^p<\infty\}$	$\{(x_n)\mid \sup_n \lvert x_n\rvert<\infty\}$	$\{[a,b]$上的连续函数$\}$	$\{f\mid \int \lvert f\rvert^p dm<\infty\}$	$\{f\mid \text{ess.sup}\lvert f\rvert<\infty\}$
范数	$\sup_n \lvert x_n\rvert$			$(\sum_n \lvert x_n\rvert^p)^{\frac{1}{p}}$	$\sup_n \lvert x_n\rvert$	$\sup_{[a,b]} \lvert f\rvert$ / $\int_a^b \lvert f(x)\rvert dm$	$(\int \lvert f\rvert^p dm)^{\frac{1}{p}}$	$\text{ess.sup}\lvert f\rvert$
完备性	✓	✓	X	✓	✓	✓ / X	✓	✓
可分性	✓	✓	✓	✓	X	✓(Weierstrass逼近定理)	✓	X
可表稠子集	$\{(x_1,\dots,x_n,q,q,\dots)\mid x_1,\dots,x_n,q\in\mathbb{Q}\}_{n\in\mathbb{N}}$	$\{(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0,\dots):x_1,\dots,x_n\in\mathbb{Q},n\in\mathbb{N}\}$			\	[有理系数多项式]		\
对偶空间	ℓ^1	ℓ^1	?	$\begin{cases} p=1: \ell^\infty \\ p>1: \ell^q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{cases}$	不是 ℓ^1 ?	?	$\begin{cases} p=1: L^\infty \\ p>1: L^q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{cases}$	不是 L^1 ?
自反性 $(X\neq X^{**})$	X	X	?	$\begin{cases} \ell^1: X \\ \ell^p(p>1): ✓ \end{cases}$	X	?	$\begin{cases} L^1: X \\ L^p(p>1): ✓ \end{cases}$	X
一些特殊的关系	c_0. c是ℓ^∞的闭子空间 ⇒ 是Banach空间. 若$1\le p_2\le p_1<\infty$, 且$m(E)<\infty$, 则 $L^\infty(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L^{p_2}(E)$.							

Figure 7.1: 一些常见的赋范空间及其性质

1. **收敛（Convergence）**：一般指序列或函数列在某种意义下接近某个极限。具体形式取决于所考虑的拓扑或度量。
2. **一致收敛（Uniform Convergence）**：函数列 $\{f_n\}$ 在集合 S 上一致收敛到函数 f，如果对于任意的 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n \geq N$ 时，对于所有 $x \in S$，都有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$。一致收敛意味着收敛速度在 S 上是一致的。
3. **点点收敛（Pointwise Convergence）**：函数列 $\{f_n\}$ 在集合 S 上点点收敛到函数 f，如果对于每个 $x \in S$，序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛到 $f(x)$。点点收敛只关心每个点的极限，不考虑收敛速度。
4. **几乎处处收敛（Almost Everywhere Convergence）**：函数列 $\{f_n\}$ 在集合 S 上几乎处处收敛到函数 f，如果存在 S 的零测度子集 E，使得 $\{f_n\}$ 在 $S \setminus E$ 上点点收敛到 f。几乎处处收敛是点点收敛的弱化，允许在零测度集上不收敛。
5. **依测度收敛（Convergence in Measure）**：函数列 $\{f_n\}$ 在集合 S 上依测度收敛到函数 f，如果对于任意的 $\epsilon > 0$，$\{x \in S : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ 的测度趋于 0。依测度收敛比几乎处处收敛更弱，只关心不收敛的点集的测度。
6. **平方平均收敛（Convergence in Mean）**：函数列 $\{f_n\}$ 在集合 S 上平方平均收敛到函数 f，如果 $\int_S |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \to 0$。平方平均收敛是 L^2 空间中的收敛形式。
7. **强收敛（Strong Convergence）**：在巴拿赫空间中，序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x，如果 $\|x_n - x\| \to 0$。强收敛是赋范空间中的收敛形式，与范数有关。
8. **弱收敛（Weak Convergence）**：在巴拿赫空间中，序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x，如果对于每个连续线性泛函 f，都有 $f(x_n) \to f(x)$。弱收敛比强收敛更弱，只关心序列在连续线性泛函下的像的收敛。

Figure 7.2: 一些收敛的定义