
数理逻辑与数学分析

课程讲义与习题整理

作者：你的名字

2026 年 8 月

目录

数理逻辑	3
1 命题逻辑	4
1.1 命题与联结词	4
1.1.1 命题概念	4
1.2 等价演算与范式	4
1.2.1 基本等价式	4
1.2.2 析取范式与合取范式	4
2 谓词逻辑	5
2.1 谓词与量词	5
2.2 前束范式	5
 数学分析基础	 7
3 函数与极限	8
3.1 函数概念	8
3.1.1 常见函数的极限	8
3.1.2 函数值表与抛物线图像	8
3.2 连续性与导数	8
4 微分中值定理与积分	9
4.1 微分中值定理	9
4.2 泰勒公式	9
4.3 不定积分与分部积分	9
5 线性代数初步	10
5.1 矩阵与行列式	10
5.1.1 矩阵的基本运算	10
5.1.2 克拉默法则	10

数理逻辑

数理逻辑是用数学方法研究逻辑推理的学科。它通过形式化语言和演算系统，精确地刻画了命题、谓词、推理规则以及证明的数学结构。

“逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还必须使用逻辑。”——谢因

第 1 章 命题逻辑

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题概念

命题是能判断真假的陈述句。例如，“2 是偶数”是一个真命题，“ $3 < 1$ ”是一个假命题。

定义 1.1. 将命题看作变量（取值为真 $\top$ 或假 $\perp$ ），称为**命题变元**。通过 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 等逻辑联结词，可以构造复合命题。

1.2 等价演算与范式

1.2.1 基本等价式

常用的等价演算律包括交换律、结合律、分配律、德摩根律等。

$$\begin{aligned}\neg(p \wedge q) &\leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ p \rightarrow q &\leftrightarrow \neg p \vee q\end{aligned}$$

1.2.2 析取范式与合取范式

每一个命题公式都可以唯一地化为析取范式 (DNF) 或合取范式 (CNF)。

例 1.1. 求 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 的析取范式。

解：利用等价演算可得：

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \leftrightarrow r &\equiv (\neg p \vee q) \leftrightarrow r \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg p \vee q)) \\ &\equiv \dots\end{aligned}$$

第 2 章 谓词逻辑

2.1 谓词与量词

谓词逻辑引入了全称量词 $\forall$ 和存在量词 $\exists$ 。命题不再仅限于单个个体，而是与论域中的对象相关。

定理 2.1 (量词否定律). 量词的否定具有如下性质：

$$\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

证明. 设论域为 D 。若 $\neg \forall x P(x)$ 为真，说明并非论域中所有 x 都满足 $P(x)$ ，即至少存在一个 x 使得 $P(x)$ 为假，这等价于 $\exists x \neg P(x)$ 为真。同理可证第二条。 $\square$

2.2 前束范式

谓词逻辑中的前束范式是指所有量词均位于公式最前端的范式表达。

数学分析基础

本部分将介绍函数、极限与连续性，以及微积分中的核心定理与计算方法。

第3章 函数与极限

3.1 函数概念

函数是数学中描述变量之间依赖关系的基本工具。设有两个变量 x 和 y ，若对于每个 x 在定义域内都有唯一的 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$ 。

3.1.1 常见函数的极限

通过重要极限求解：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

定理 3.1 (洛必达法则). 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且满足：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ (或 } \infty),$$

且 $g'(x) \neq 0$ ，则：

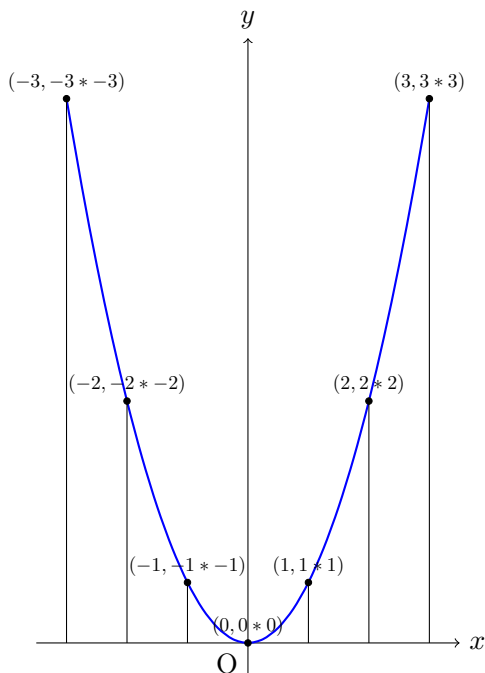
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.1.2 函数值表与抛物线图像

下面给出抛物线 $y = x^2$ 在若干点处的取值：

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4

使用 TikZ 绘制 $y = x^2$ 的图像：



3.2 连续性与导数

若函数在某点满足 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，则称 f 在 a 处连续。可导必连续，但连续不一定可导。

第 4 章 微分中值定理与积分

4.1 微分中值定理

定理 4.1 (拉格朗日中值定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

由拉格朗日中值定理可以推演出柯西中值定理, 柯西中值定理是洛必达法则证明的核心依据。

4.2 泰勒公式

利用泰勒公式可以将复杂的函数近似为多项式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x).$$

例如 e^x 在 $x = 0$ 处的泰勒展开为:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

4.3 不定积分与分部积分

$$\begin{aligned} \int k \, dx &= kx + C \\ \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \int e^x \, dx &= e^x + C \end{aligned}$$

定理 4.2 (分部积分法).

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

推导: 由乘积的求导法则 $(uv)' = u'v + uv'$, 两边积分即可得到分部积分公式。

第 5 章 线性代数初步

5.1 矩阵与行列式

线性代数是现代数学的基础，尤其在处理线性方程组和多变量问题中至关重要。

5.1.1 矩阵的基本运算

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA 。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

显然，矩阵乘法一般不满足交换律，即 $AB \neq BA$ 。

5.1.2 克拉默法则

对于线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，如果系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ ，则方程组有唯一解：

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

其中 A_i 是将 A 的第 i 列替换为向量 $\mathbf{b}$ 所得到的矩阵。

例 5.1. 解方程组：

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

解： 系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ 。

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20 - 12}{-2} = -4, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6 - 15}{-2} = 4.5.$$