

# 2026 年高三年级期初调研检测

## 数学

本试卷共 4 页, 19 题. 全卷满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

### 注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
- 考试结束后, 将本试卷与答题卡一并交回.

一、 选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 样本数据 2, 4, 6, 11, 12 的平均数是  
A. 4 B. 6 C. 7 D. 8
- 非零向量  $a, b$  满足  $|a| = 2|b|$ , 且  $(a - b) \perp b$ , 则  $a$  在  $b$  上的投影向量为  
A.  $\frac{1}{2}b$  B.  $-\frac{1}{2}b$  C.  $b$  D.  $-b$
- 若复数  $z$  满足  $(1 - i)z = |3 + 4i|$ , 则  $z$  的实部为  
A.  $\frac{5}{2}$  B.  $-\frac{5}{2}$  C.  $\frac{5}{2}i$  D.  $-\frac{5}{2}i$
- 某正圆锥的侧面展开图是一个半径为 2 的半圆, 若该圆锥的顶点和底面圆周均在同一个球面上, 则该球的表面积为  
A.  $\frac{16\pi}{3}$  B.  $8\pi$  C.  $\frac{32\pi}{3}$  D.  $16\pi$
- 函数  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4x + 5}$  的最大值与最小值的和为  
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 5$ , 则  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} =$   
A.  $\frac{n}{n+1}$  B.  $\frac{n}{2n+1}$  C.  $\frac{n}{n-1}$  D.  $\frac{n}{2n-1}$
- 在正六边形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  的顶点  $A_2, A_4, A_6$  上分别放置三只质点. 每分钟每只质点均等可能地向相邻的一个顶点移动, 且各质点的移动相互独立. 当有两只质点位于同一顶点时, 移动停止. 设移动停止所需的时间为  $T$ , 则  $E(T) =$   
A.  $\frac{4}{3}$  B.  $\frac{3}{2}$  C. 2 D.  $\frac{8}{3}$
- 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ , 且  $\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = 2\sqrt{3}$ , 则  $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  的大小关系为  
A.  $\sin 2\alpha < \cos 2\alpha < \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  B.  $\cos 2\alpha < \sin 2\alpha < \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$   
C.  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) < \cos 2\alpha < \sin 2\alpha$  D.  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) > \sin 2\alpha > \cos 2\alpha$

二、 选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 下列命题中，正确的有
- A. 若样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的均值为 2，方差为 1，则  $2x_1 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$  的方差为 4
  - B. 随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，若  $P(X \leq 2) = 0.3$ ，则  $P(X \geq 2\mu - 2) = 0.2$
  - C. 回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  至少经过样本中心点  $(\bar{x}, \bar{y})$  或其中一个样本点  $(x_i, y_i)$
  - D. 若  $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ ，则事件  $A$  与  $B$  相互独立
10. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = -f(x)$ ，且  $f(x+1)$  是偶函数. 当  $x \in [-1, 1]$  时， $f(x) = x^3 - x$ ，则下列结论正确的有
- A.  $f(x)$  是奇函数
  - B.  $f(x)$  的周期为 4
  - C.  $f(2025) = 0$
  - D. 方程  $f(x) = \frac{1}{10}x$  在  $[0, 4]$  内恰有 4 个实数根
11. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ ，点  $P(1, 2)$  在  $C$  上. 过点  $P$  作直线  $l: y - 2 = k(x - 1)$ ，与  $C$  交于另一点  $Q$ ，且  $k \in [-4, -2]$ ，则下列结论正确的有
- A. 点  $Q$  在第四象限
  - B.  $4\sqrt{2} < |PQ| \leq 4\sqrt{5}$
  - C. 线段  $PQ$  的中点在直线  $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$  上
  - D.  $\triangle OPQ$  的面积不大于 6

三、 填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2，则异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为 \_\_\_\_\_.
13. 展开式  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  中的常数项为 \_\_\_\_\_.
14. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的右焦点为  $F$ ，过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点. 若  $|AB| = 4$ ，则直线  $l$  的斜率的平方为 \_\_\_\_\_.

四、 解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

在锐角  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $a \cos B + b \cos A = 2c \cos C$ .

- (1) 求角  $C$  的大小；
- (2) 若  $c = \sqrt{7}$ ，求  $\triangle ABC$  周长的最大值.

16. (15 分)

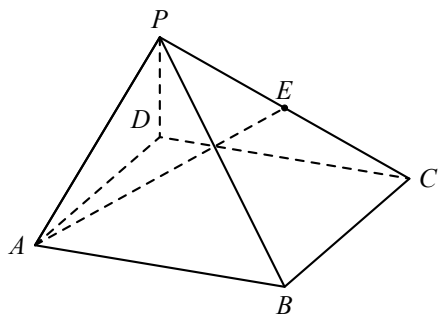
已知双曲线  $C: \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{28} = 1$ , 过点  $P(2, 1)$  的直线  $l$  交双曲线  $C$  于  $A, B$  两点.

- (1) 若直线  $l$  的斜率为  $k$ , 且  $A, B$  在双曲线的同一支上, 求  $k$  的取值范围;
- (2) 若线段  $AB$  的中点为  $M$ , 且  $M$  在直线  $y = 2x - 3$  上, 求直线  $l$  的方程.

17. (15 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\triangle PAB$  是以  $PA$  为斜边的等腰直角三角形. 已知  $AB = 2$ ,  $AD = 2\sqrt{2}$ , 点  $E$  是棱  $PC$  的中点.

- (1) 证明:  $AE \perp BD$ ;
- (2) 求直线  $AE$  与平面  $ABCD$  所成角的正弦值.



18. (17 分)

已知函数  $f(x) = x^2 - ax + \ln x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

- (1) 当  $a = 3$  时, 求  $f(x)$  的极值;
- (2) 若  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增, 求实数  $a$  的取值范围;
- (3) 若存在  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) 使得  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , 证明:  $a > 2\sqrt{2}$ .

19. (17 分)

设  $n \in \mathbf{N}^*$ , 考虑正整数数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 将其以  $n$  为周期构造成无穷数列, 即对所有正整数  $i$ , 均有  $a_{n+i} = a_i$ . 当该无穷数列满足如下两个条件时, 我们称其为一个“C 数列”:

①  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_1 + n$ ;

② 对每个  $i = 1, 2, \dots, n$ , 均有  $a_{a_i} \leq n + i - 2$ .

(1) 证明: C 数列满足  $a_1 \leq n - 1$ .

(2) 设  $a_1 = r$ , 其中  $r \in \mathbf{N}^*$ . 证明:  $a_r \leq n - 1$ , 并证明数列中大于  $n$  的项不超过  $n - r$  项.

(3) 设 C 数列中共有  $t$  项大于  $n$ .

(i) 证明:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n^2$ .

(ii) 若  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$ , 求数列  $\{a_n\}$  的所有可能形式, 并求满足条件的 C 数列共有多少个.